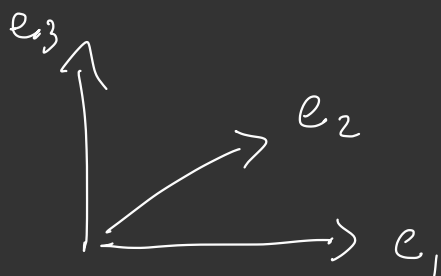



Rappels de M.M.C



e_i vecteur de base

x_i $i=1, 2, 3$ coordonnée

x, y, z



$$\|e_i\| = 1$$

$$e_i \cdot e_j = 0$$

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\text{Vecteur } \underline{v} = v_i \underline{e}_i$$

$$\text{Tenseur du 2^o ordre } \underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$e_1 \otimes e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

produit
dyadique

$$e_1 \otimes e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_3 \otimes e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T : Transformation linéaire
du vecteur $v_i \rightarrow w_i$

$$w_i = T_{ij} v_j$$

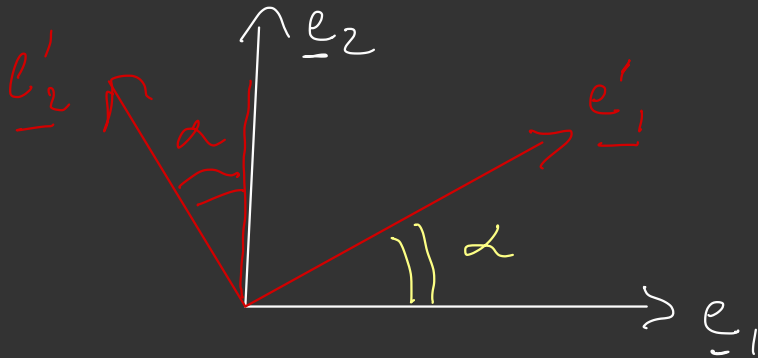
Exemple Tenseur du 4ⁱⁿ ordre $\begin{matrix} C \\ || \\ || \\ || \\ || \end{matrix}$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \rightarrow$$

Tenseur du 2ⁱⁿ ordre
"contraintes"

Tenseur du 2ⁱⁿ ordre
"déformation"

CHANGEMENT de Base



Matrice de rotation

$$R_{ij} = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j = \cos(\widehat{\underline{e}'_i, \underline{e}_j})$$

$$R_{11} = \cos \alpha \quad R_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$R_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad R_{22} = \cos \alpha$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

change ment de repère

$$\underline{e}'_i = R_{ij} \underline{e}_j$$

pour 1 vecteur

$$\underline{v}'_i = R_{ij} \underline{v}_j$$

$$\underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_j = \delta_{ij}$$

$$R_{ik} \underline{e}_k \cdot R_{jl} \underline{e}_l = \delta_{ij}$$

$$R_{ik} R_{jl} = \delta_{ij}$$

pour 1 Tenseur T_{ij} dans le repère $\underline{e}_i$

$$\rightarrow \{ T'_{ij} = R_{ik} R_{jl} T_{kl} \}$$

OPERATEURS

DIFFERENTIALS

soit 1 fonction scalaire $f(x_i, t)$
 $\hat{t}$ Temps

Gradient (= Spatial)

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \underline{e_i} = \underline{f_{,i}} \underline{e_i}$$

Dérivée Temporelle

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\ddot{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

1 champ vectoriel $v_i(x_i, t)$

Divergence (Spatiale)

$$\nabla \cdot \underline{v} = \underbrace{v_{i,i}} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

(convention $\uparrow$ somme sur les indices répétés)

pour 1 champ de Tenseurs $T_{ij}(x_i, t)$

Divergence (Spatiale)

$$\nabla \cdot \underline{T} = \underline{T_{ij,j}} = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

Déformation infinitésimale

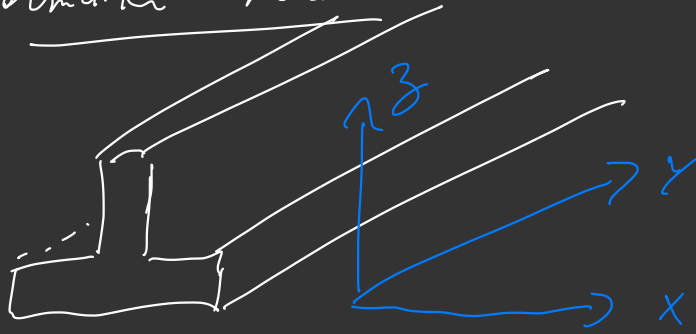
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

où u_i est le vecteur de déplacement

$$u_i = x_i(t) - X_i$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\underline{u}})$$

Deformation plane



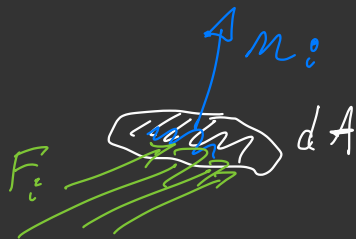
Dans cet exemple
 y est la direction
de def. plane

$$\epsilon_{yy} \equiv 0$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \epsilon_{zy} = \epsilon_{yz} = 0$$

$\hookrightarrow$ on se ramène à 1 problème 2D

CONTRAINTES



✓ F_i force
appliquée
sur dA

vector contraintes

$$t_i = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{F_i}{dA}$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

↖ n_j la normale à
la surface

σ_{ij} Tenseur des contraintes

EQUATION d'EQUILIBRE

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \underbrace{\sigma_{ij,j}}_{\text{force internes}} + b_i \quad \text{force de volume}$$

Dans beaucoup de cas, les déplacements sont quasi-statiques
de telle sorte que les effets inertiels sont
souvent négligeables $\rightarrow \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \ll \quad \quad \quad$

EQUILIBRE quasi-statique $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$

Conservation du moment angulaire donne

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Tenseur des contraintes est Symétrique

CONTRAINTES PRINCIPALES



direction de contr. principale est donnée
par la facette pour laquelle il n'y a pas
de cisaillement

$$t_i = \sqrt{\lambda} n_i \quad \leftarrow \text{valeur}$$

direction

$$\sigma_{ij} n_j = \lambda n_i \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$$

problème de valeurs propres / vecteurs propres
contraintes principales = valeurs propres

σ_I , σ_{II} , σ_{III}

NOTATION	MECANIQUE	SOLS	ROCHES
$\sigma_{ij} > 0$	en compression		éléments $\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}$
$\epsilon_{ij} > 0$	en contraction		

Dans l'équation d'équilibre, on obtient avec la contrainte $\sigma_{ij} > 0$ en compression

$$\sigma_{ij,j} - b_i = 0$$

Exemple

compression 1D



$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$$

$$\epsilon_{xx} = E \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\oplus u_x(x=L) = 0$$

$$u_x(x) = \frac{\sigma_{xx}}{E} (x - L)$$

$\sigma_{ij} > 0$ en compression

$\varepsilon_{ij} > 0$ en contraction.

$u_i > 0$ dans le sens opposé du
système de coordonnées utilisé

! Dans certaine réf.
 $\varepsilon_{ij} = -\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$